



ce
pre
UNI

**CICLO
PRE 2024 - I**

Trigonometría

LA RECTA Y SUS ECUACIONES



LA RECTA EN EL PLANO CARTESIANO

De los postulados de Euclides, sabemos que una recta (en general) es un conjunto infinito de puntos que mantienen una misma dirección.

Necesitamos conceptos previos, como ángulo de inclinación de una recta y pendiente de una recta, para traducir esta noción geométrica a una idea algebraica.

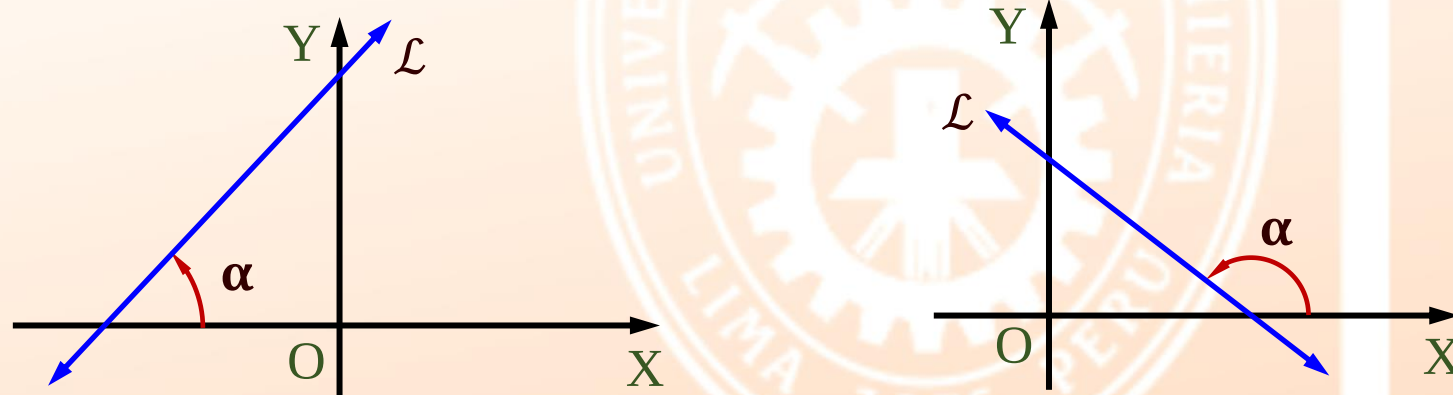
ÁNGULO DE INCLINACIÓN DE UNA RECTA

Definición

Se denomina **ángulo de inclinación** de una recta, al ángulo medido en sentido antihorario, desde un punto conveniente del eje de abscisas hacia la recta.

Si α es la medida de dicho ángulo entonces $0^\circ \leq \alpha^\circ < 180^\circ$.

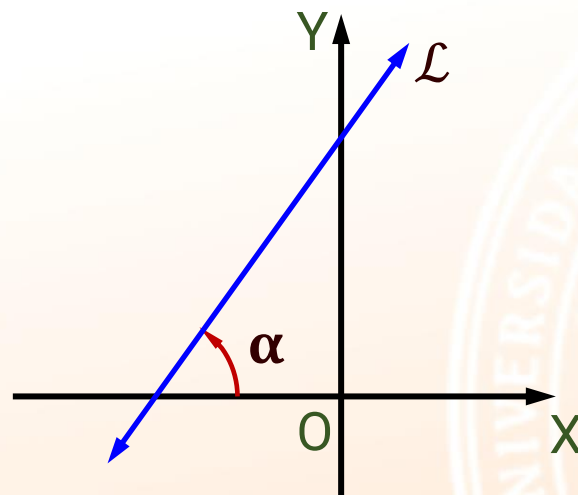
Ejemplos:



PENDIENTE DE UNA RECTA

Definición

Dada una recta $\mathcal{L}$, no vertical, se denomina **pendiente de la recta $\mathcal{L}$** , denotada por m , a la tangente de la medida de su ángulo de inclinación, es decir, si α es la medida del **ángulo de inclinación** de la recta, $m = \tan(\alpha)$.



$$m = \tan(\alpha)$$

Estas ideas geométricas que podemos observar en el plano cartesiano, respecto de una recta, nos motiva a darle una interpretación algebraica.

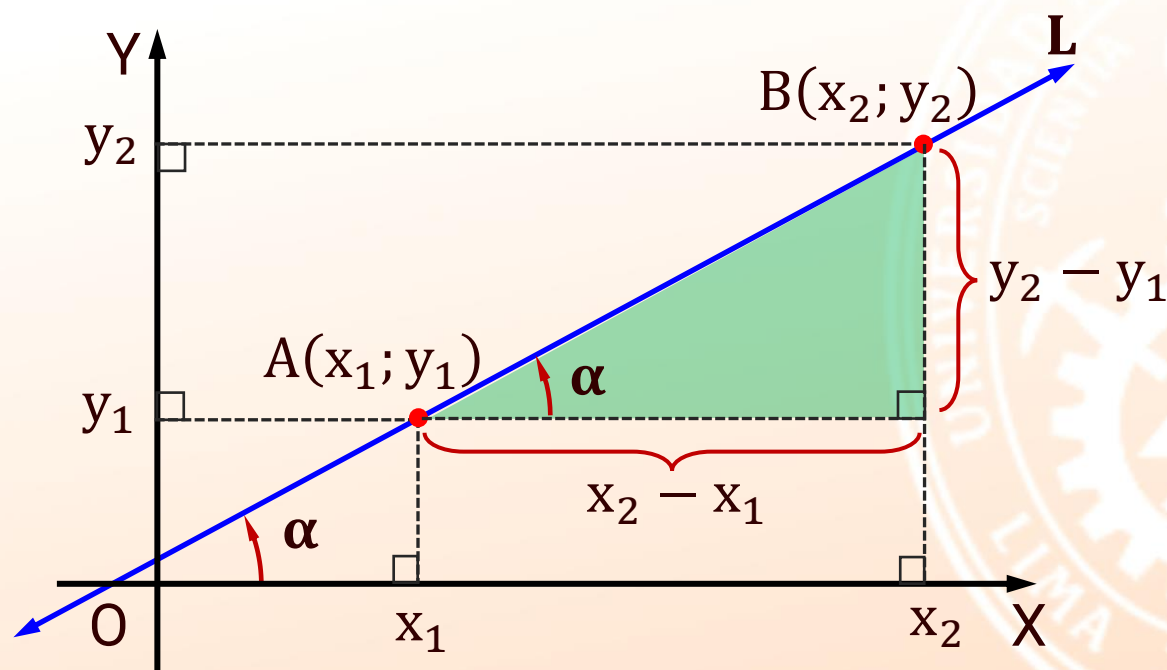
CÁLCULO DE LA PENDIENTE DE UNA RECTA

Teorema 1

Si $A(x_1; y_1)$ y $B(x_2; y_2)$ son dos puntos diferentes, que pertenecen a una recta $\mathcal{L}$, la pendiente de dicha recta es

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad x_1 \neq x_2$$

Demostración:



Por definición:

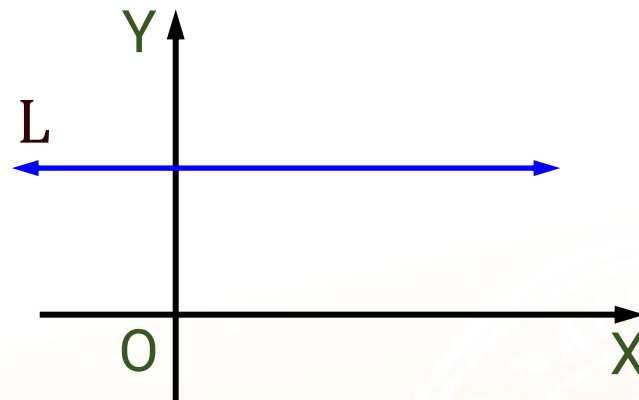
$$m = \tan(\alpha)$$

$$\tan(\alpha) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (x_1 \neq x_2)$$

Recta horizontal

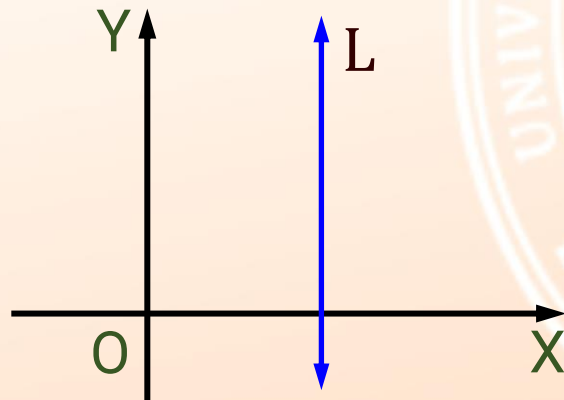
Decimos que una recta $\mathcal{L}$ es **horizontal** si es **paralela al eje de abscisas**.



Note que la medida del **ángulo de inclinación es 0°** y por consiguiente su **pendiente es 0**.

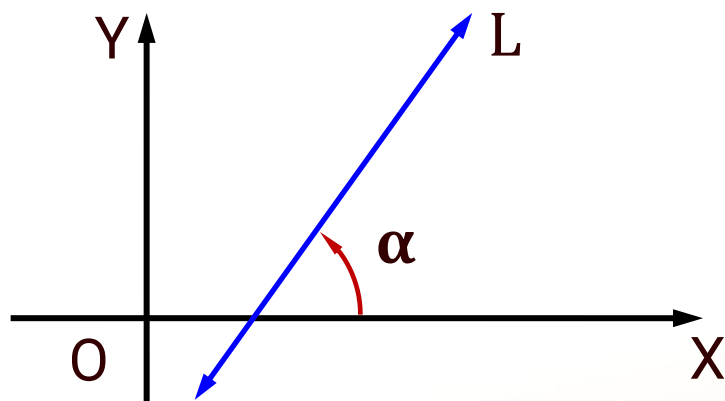
Recta vertical

Decimos que una recta $\mathcal{L}$ es **vertical** si es **paralela al eje de ordenadas**.

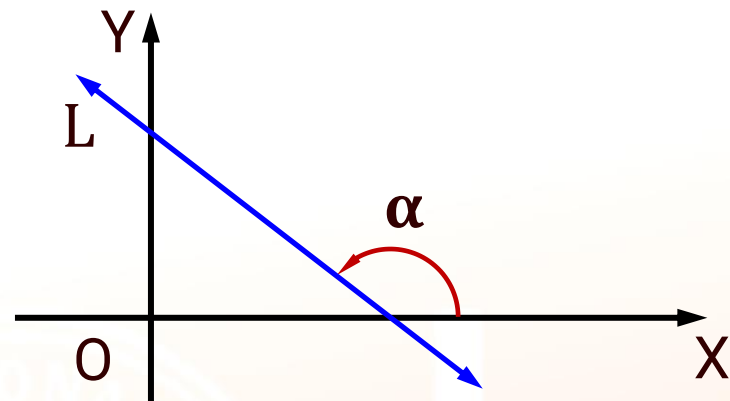


Note que la medida del **ángulo de inclinación es 90°** pero su **pendiente no está definida**.

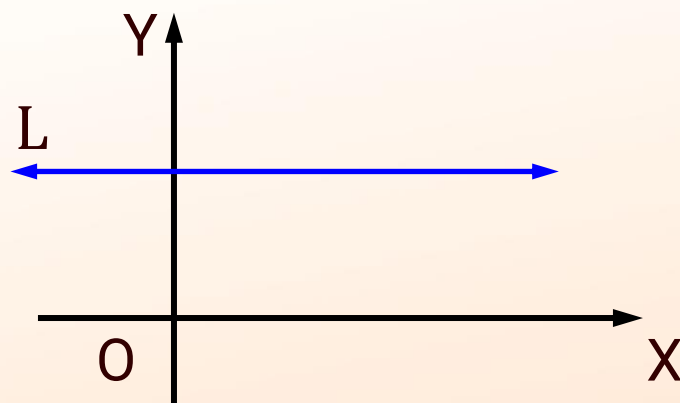
OBSERVACIONES:



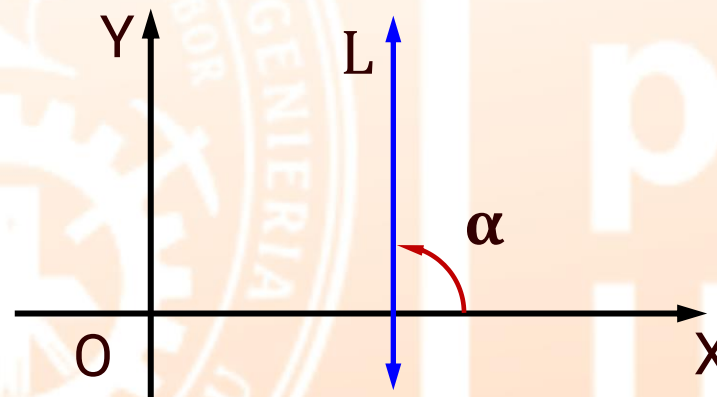
$$\text{Si } 0^\circ < \alpha < 90^\circ \Rightarrow m > 0$$



$$\text{Si } 90^\circ < \alpha < 180^\circ \Rightarrow m < 0$$



$$\text{Si } \alpha = 0^\circ \Rightarrow m = 0$$



$$\text{Si } \alpha = 90^\circ \Rightarrow m \text{ no está definida}$$

ECUACIÓN DE UNA RECTA

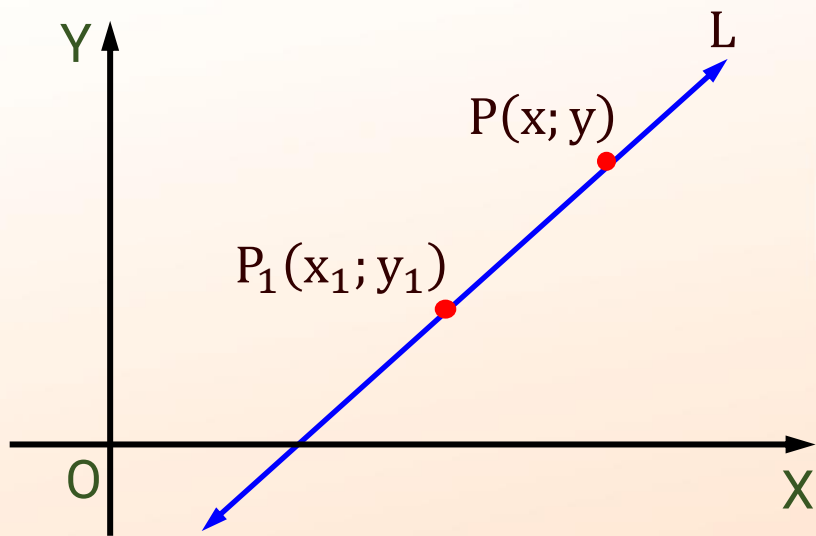
1. ECUACIÓN DE UNA RECTA CONOCIENDO SU PENDIENTE Y UN PUNTO DE PASO

Teorema 2

Una recta de pendiente m , que pasa por el punto $P_1(x_1; y_1)$, tiene por ecuación:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Demostración



Del teorema 1: $m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$

$$\Rightarrow m(x - x_1) = y - y_1$$

Finalmente,

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

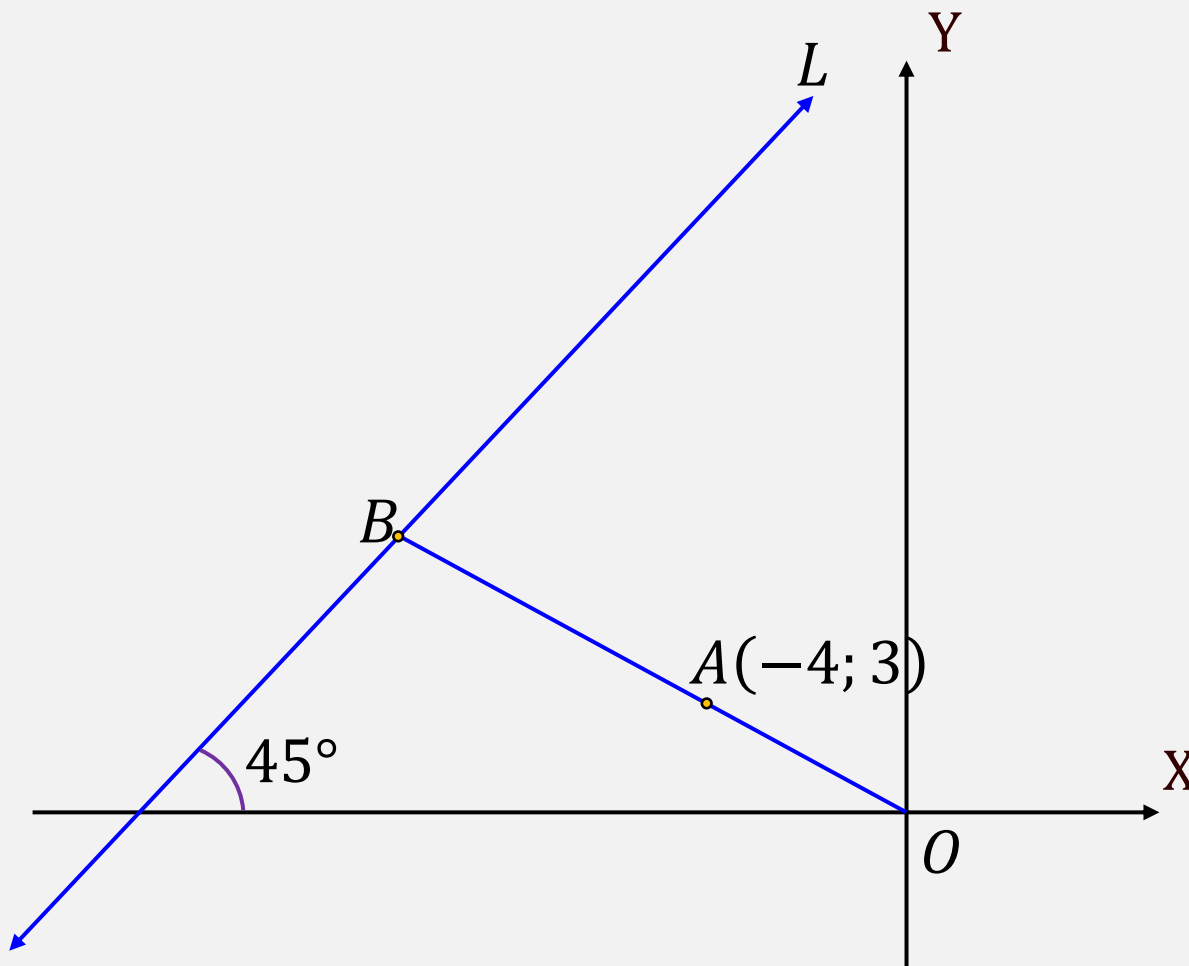
(Ecuación punto-pendiente)

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



PROBLEMA 01

En la figura mostrada $BA = 2AO$. Determine la ecuación de la recta L .



A) $x - y + 5 = 0$

B) $x - y + 20 = 0$

C) $x - y + 21 = 0$

D) $x + y + 5 = 0$

E) $x - y + 15 = 0$

CLAVE: C

2. ECUACIÓN DE UNA RECTA CONOCIENDO DOS PUNTOS DE PASO

Teorema 3

Una recta que pasa por dos puntos dados $P_1(x_1; y_1)$ y $P_2(x_2; y_2)$ tiene por ecuación:

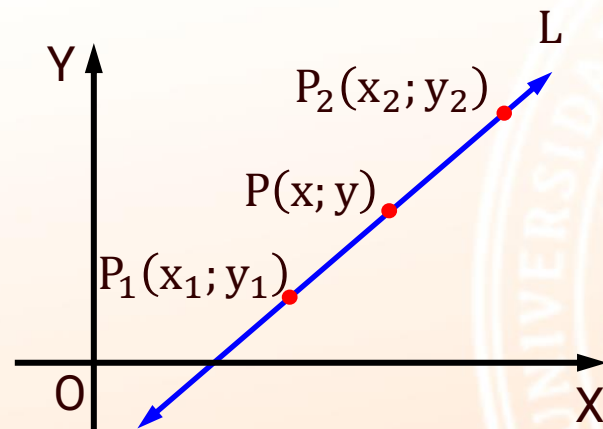
$$y - y_1 = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)} (x - x_1)$$

con $x_1 \neq x_2$.

Demostración:

Del teorema 1:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



Tomando el punto $P_1(x_1; y_1)$ y del teorema 2:

$$y - y_1 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right) (x - x_1)$$

Ejemplo:

Determine la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(3; 4)$ y $B(-2; -4)$.

$$L: y - y_1 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right) (x - x_1)$$

$$y - 4 = \left(\frac{-4 - 4}{-2 - 3} \right) (x - 3)$$

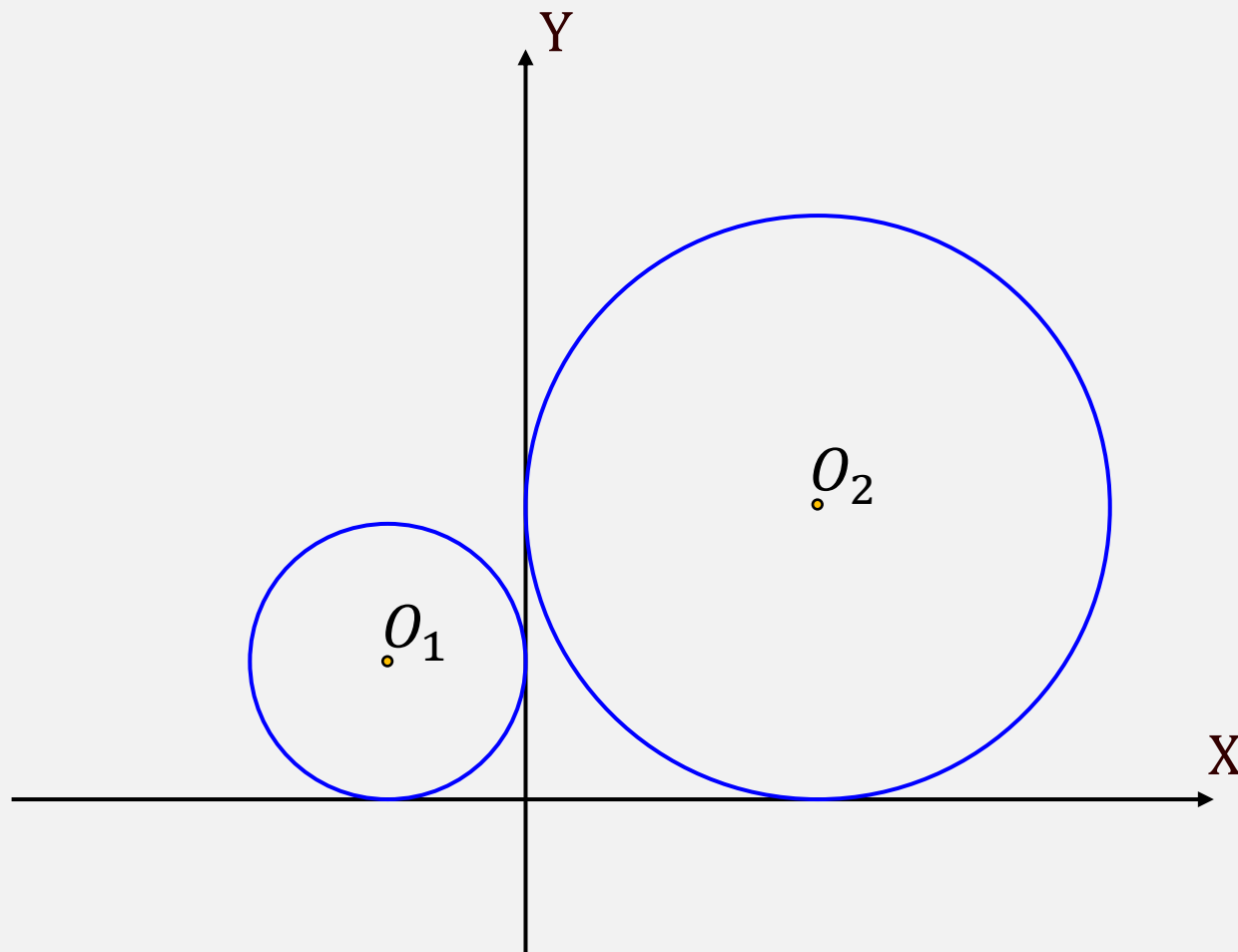
$$y - 4 = \frac{8}{5} (x - 3)$$

$$5y - 20 = 8x - 24$$

$$\therefore L: 8x - 5y - 4 = 0$$

PROBLEMA 02

Determine la ecuación de la recta que une los centros de las circunferencias mostradas de radios $6u$ y $13u$.



A) $7x - 5y + 4 = 0$

B) $7x + 2y - 4 = 0$

C) $7x - 19y + 150 = 0$

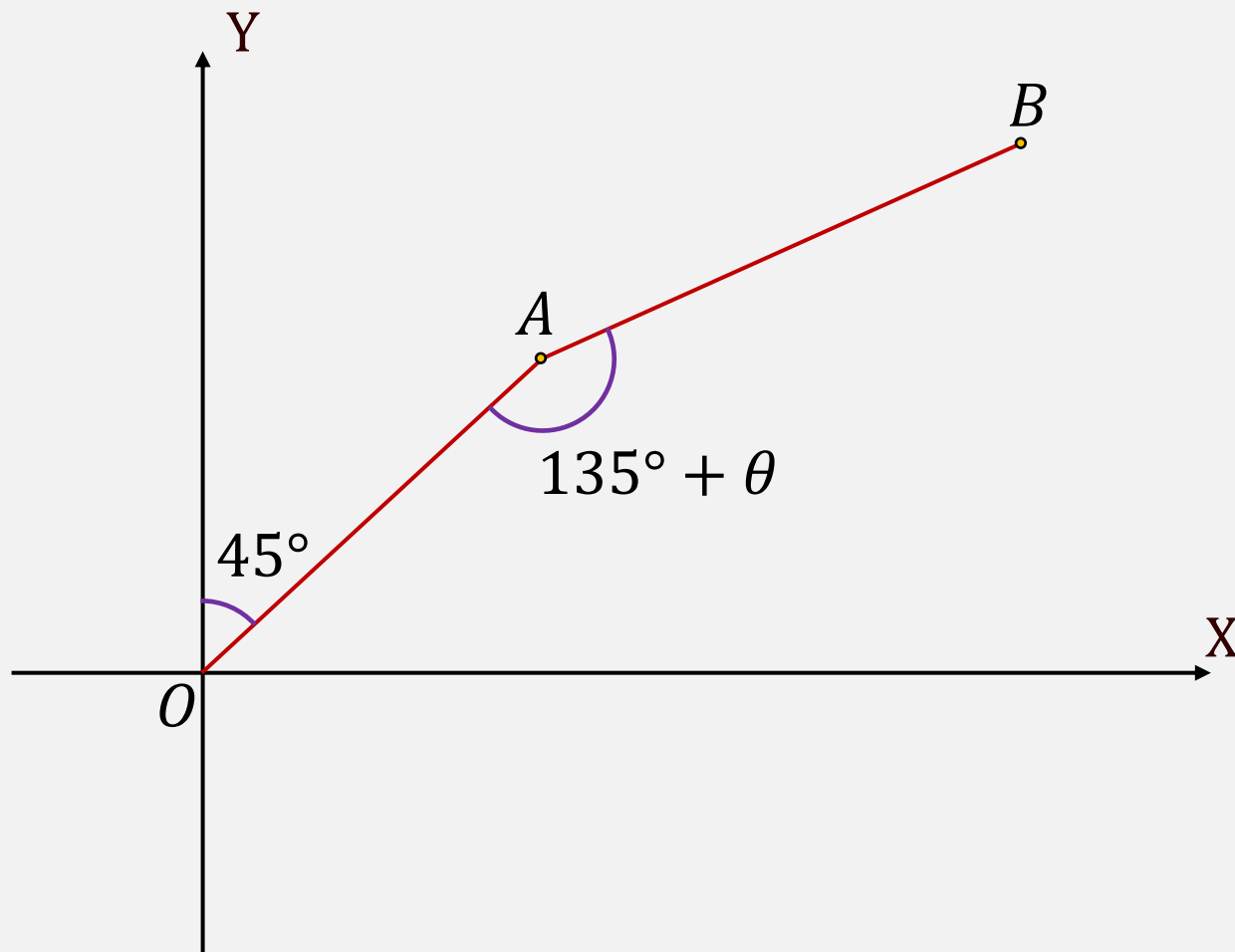
D) $7x - 19y + 156 = 0$

E) $14x - 11y + 140 = 0$

CLAVE: D

PROBLEMA 03

Según el gráfico: $AO = 8\sqrt{2}$ y $AB = 10$. Determine la ecuación de la recta que contiene al punto medio de $\overline{AO}$ y el punto B. Considere $\tan(\theta) = \frac{3}{4}$



A) $4x - 5y + 3 = 0$

B) $4x - 5y + 2 = 0$

C) $3x - 5y + 3 = 0$

D) $5x - 4y + 2 = 0$

E) $5x - 6y + 4 = 0$

CLAVE: E

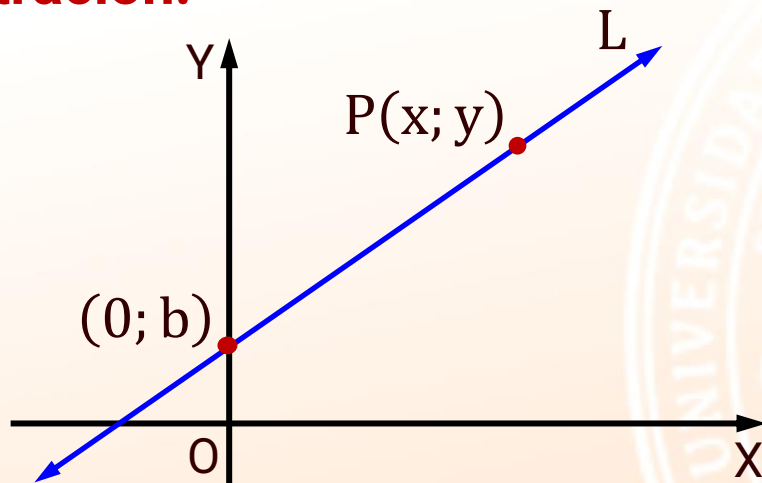
3. ECUACIÓN DE UNA RECTA CONOCIENDO SU PENDIENTE Y SU ORDENADA AL ORIGEN

Teorema 4

Una recta cuya pendiente es m y su ordenada al origen es b , tiene por ecuación

$$y = mx + b$$

Demostración:

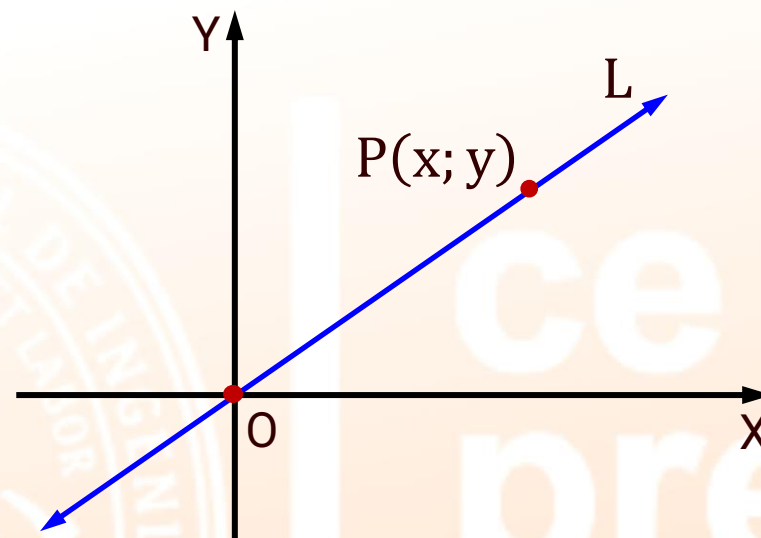


Del teorema 2: $y - b = m(x - 0)$

Finalmente

$$y = mx + b$$

Caso particular:



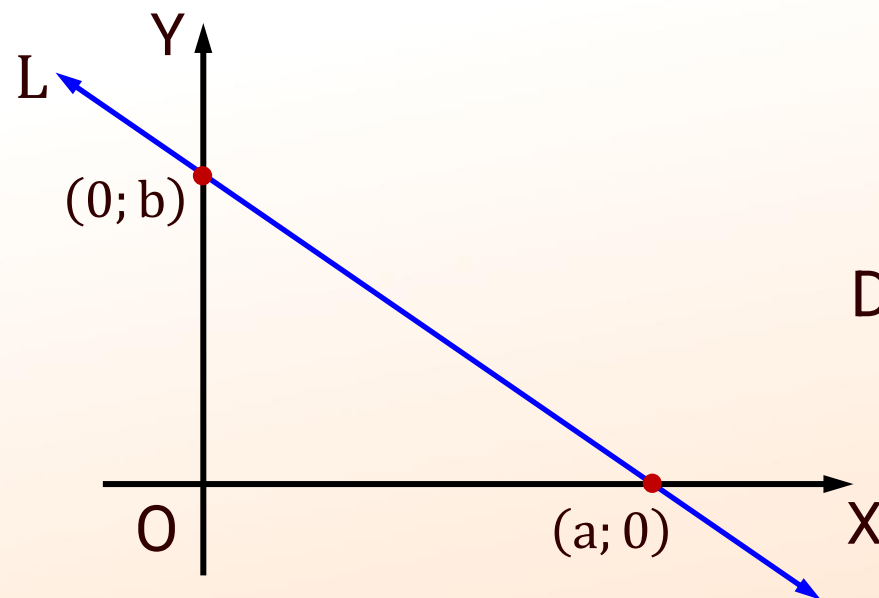
$$L: y = mx$$

4. ECUACIÓN SIMÉTRICA DE LA RECTA

La recta cuyos interceptos con los ejes coordenados son $(a; 0)$ y $(0; b)$, $a \neq 0$ y $b \neq 0$ tiene por ecuación

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Demostración:



Del teorema 1: $m = \frac{b - 0}{0 - a} = -\frac{b}{a}$

Del teorema 4: $y = -\frac{b}{a}x + b \Rightarrow \frac{y}{b} = -\frac{x}{a} + 1$

Finalmente:

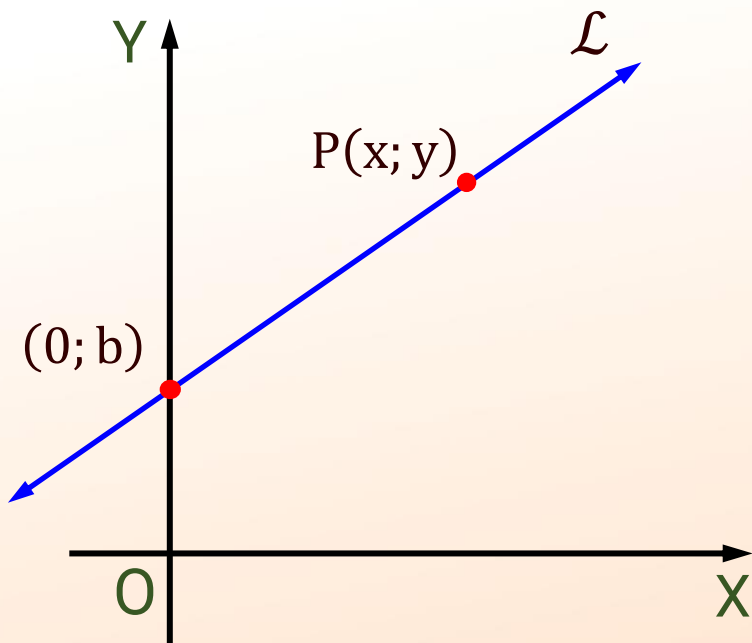
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

5. ECUACIÓN GENERAL DE LA RECTA

Teorema 5

Una ecuación lineal en variable x e y representa una recta y recíprocamente. Dicha ecuación tiene la forma:

$$Ax + By + C = 0$$



Observación:

$$\text{Si } B \neq 0 \Rightarrow y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

$$\text{Del teorema 4: } y = mx + b$$

Note:

$$m = -\frac{A}{B}$$

Pendiente de $\mathcal{L}$

$$b = -\frac{C}{B}$$

Intercepto con el eje Y

ECUACIÓN GENERAL DE LA RECTA

Analicemos la ecuación lineal en variables x e y :

$$Ax + By + C = 0$$

Caso 1: $B = 0 \wedge A \neq 0$

La ecuación se reduce a: $Ax + C = 0 \Rightarrow x = -\frac{C}{A}$

Ecuación de una
recta vertical

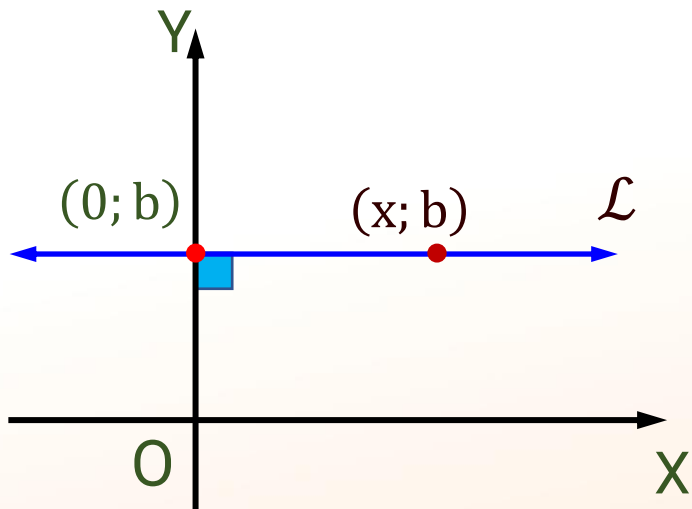
Caso 2: $B \neq 0 \wedge A = 0$

La ecuación se reduce a: $By + C = 0 \Rightarrow y = -\frac{C}{B}$

Ecuación de una
recta horizontal

Ecuación de una recta horizontal y vertical

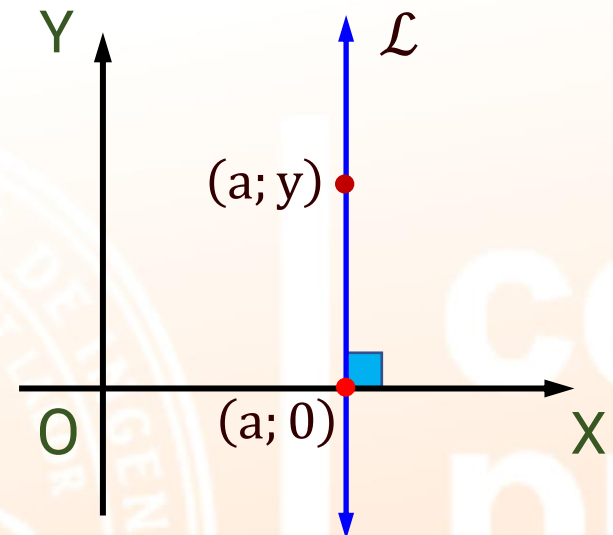
1. Recta horizontal:



$$m = 0 \Rightarrow$$

$$\mathcal{L}: y = b$$

2. Recta vertical:



De la ecuación
general:

$$\Rightarrow$$

$$\mathcal{L}: x = a$$

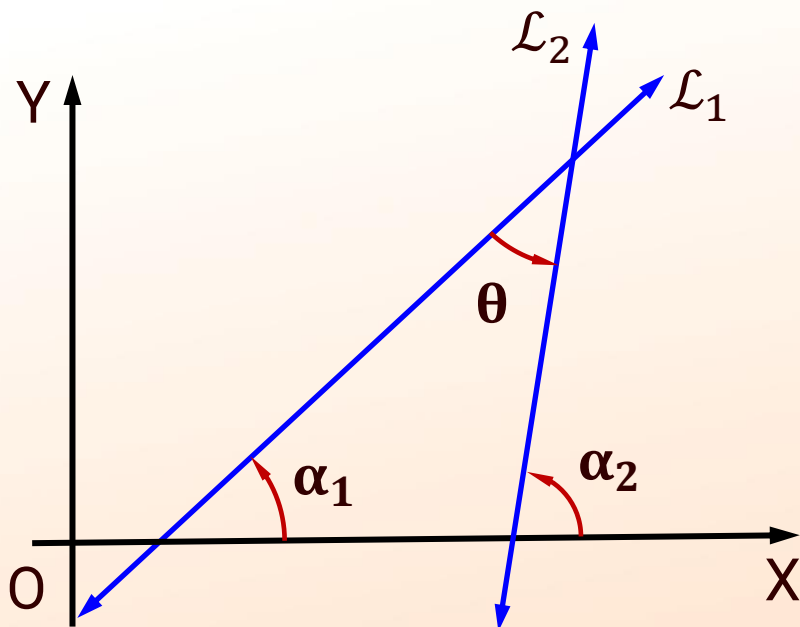
MEDIDA DEL ÁNGULO FORMADO POR DOS RECTAS

Teorema 6

Dadas las rectas L_1 y L_2 de pendientes m_1 y m_2 , respectivamente; la medida θ del ángulo formado por dichas rectas y medido desde L_1 a L_2 en sentido antihorario se calcula a partir de

$$\tan(\theta) = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}, \quad m_1 \cdot m_2 \neq -1$$

Demostración:



De la figura $\theta = \alpha_2 - \alpha_1$

Por identidad $\tan(\theta) = \frac{\tan(\alpha_2) - \tan(\alpha_1)}{1 + \tan(\alpha_2) \tan(\alpha_1)}$

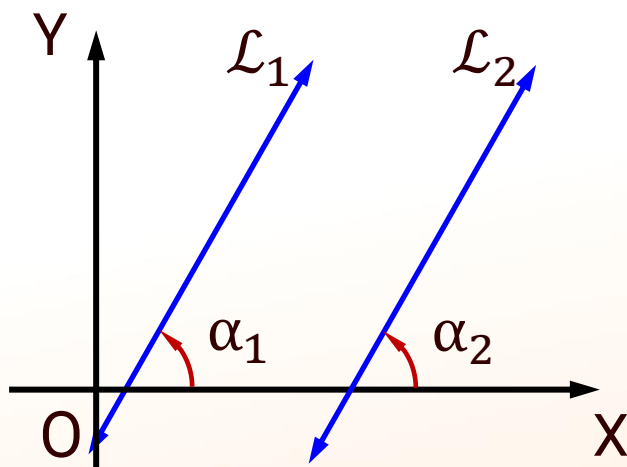
Por definición $\tan(\alpha_2) = m_2$ y $\tan(\alpha_1) = m_1$

Reemplazamos

$$\tan(\theta) = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1}$$

RECTAS PARALELAS

Si dos rectas no verticales son paralelas, sus pendientes son iguales.



Demostración:

$$\text{Si } L_1 \parallel L_2 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2$$

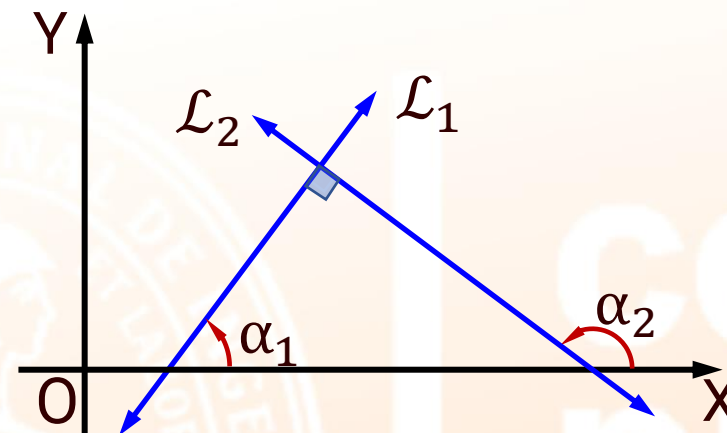
$$\Rightarrow \tan(\alpha_1) = \tan(\alpha_2)$$

entonces:

$$m_1 = m_2$$

RECTAS PERPENDICULARES

Si dos rectas oblicuas son perpendiculares, entonces el producto de sus pendientes es igual a -1 .



Demostración:

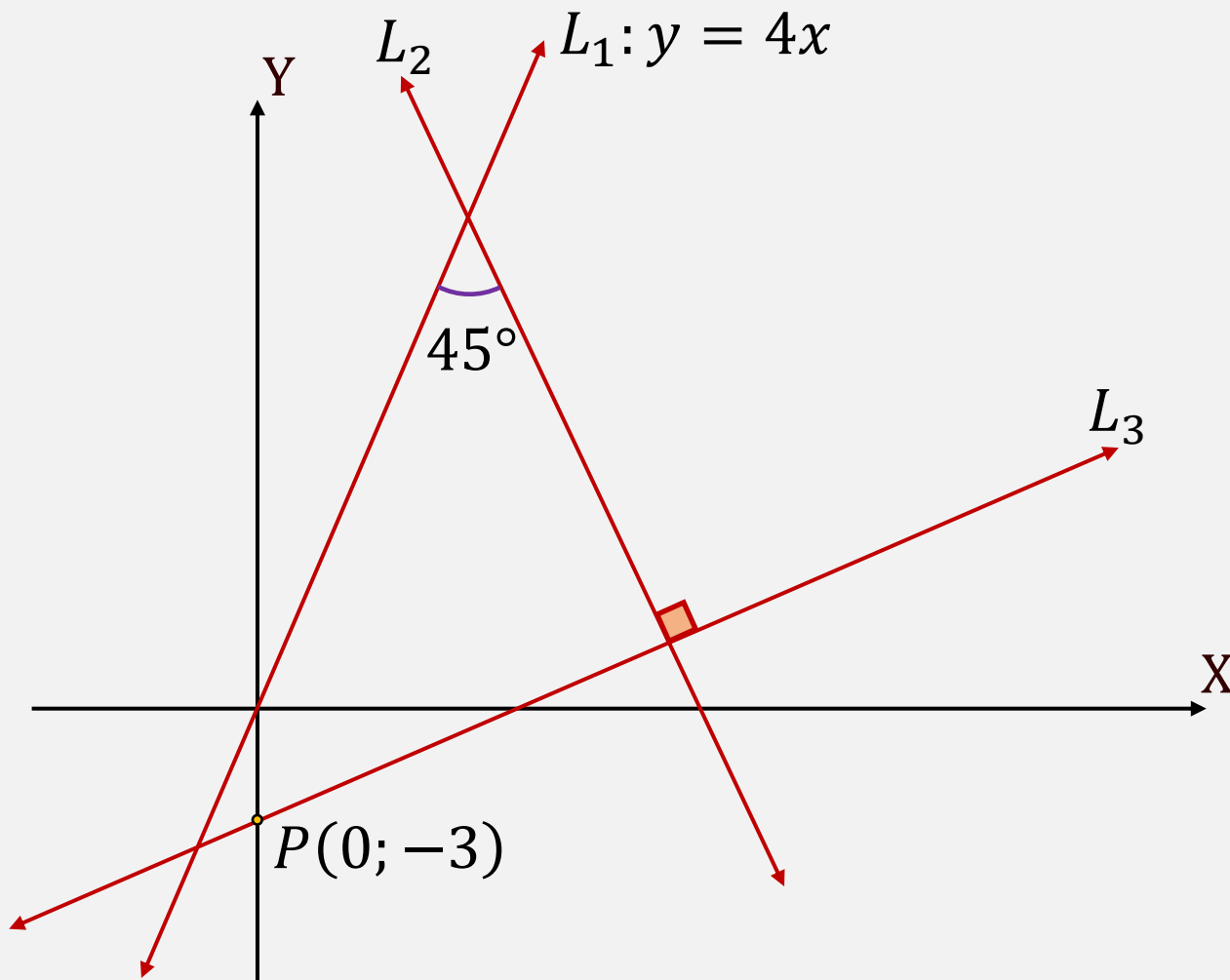
$$\begin{aligned} \text{Si } L_1 \perp L_2 &\Rightarrow \tan(180^\circ - \alpha_2) = \cot(\alpha_1) \\ &= \frac{1}{\tan(\alpha_1)} \\ &\Rightarrow -\tan(\alpha_2) = \frac{1}{\tan(\alpha_1)} \end{aligned}$$

Finalmente:

$$m_1 \cdot m_2 = -1$$

PROBLEMA 04

De la figura mostrada, determine la ecuación de la recta L_3 .



A) $3x - 5y + 5 = 0$

B) $3x - 5y + 6 = 0$

C) $3x - 5y - 15 = 0$

D) $3x - 4y + 5 = 0$

E) $3x - 4y + 7 = 0$

CLAVE: C

PROBLEMA 05

En un paralelogramo ABCD, $A(-4; -1)$, $B(1; 2)$ y $C(8; 4)$. Determine la ecuación general de la recta que pase por la perpendicular a $\overline{CD}$ y el punto medio de $\overline{BC}$.

- A) $5x + y - 2 = 0$
- B) $3x + 4y - 5 = 0$
- C) $7x + y - 1 = 0$
- D) $10x + 6y + 3 = 0$
- E) $10x + 6y - 63 = 0$

CLAVE: E

PROBLEMA 06

Halle la ecuación de la recta de pendiente negativa que pasando por el punto de coordenadas $(1; 7)$ forma un ángulo de 45° con la recta $2x - y + 3 = 0$.

- A) $3x + y - 10 = 0$
- B) $3x + y - 5 = 0$
- C) $6x + 2y + 1 = 0$
- D) $6x + 2y - 3 = 0$
- E) $x + y - 3 = 0$

CLAVE: A

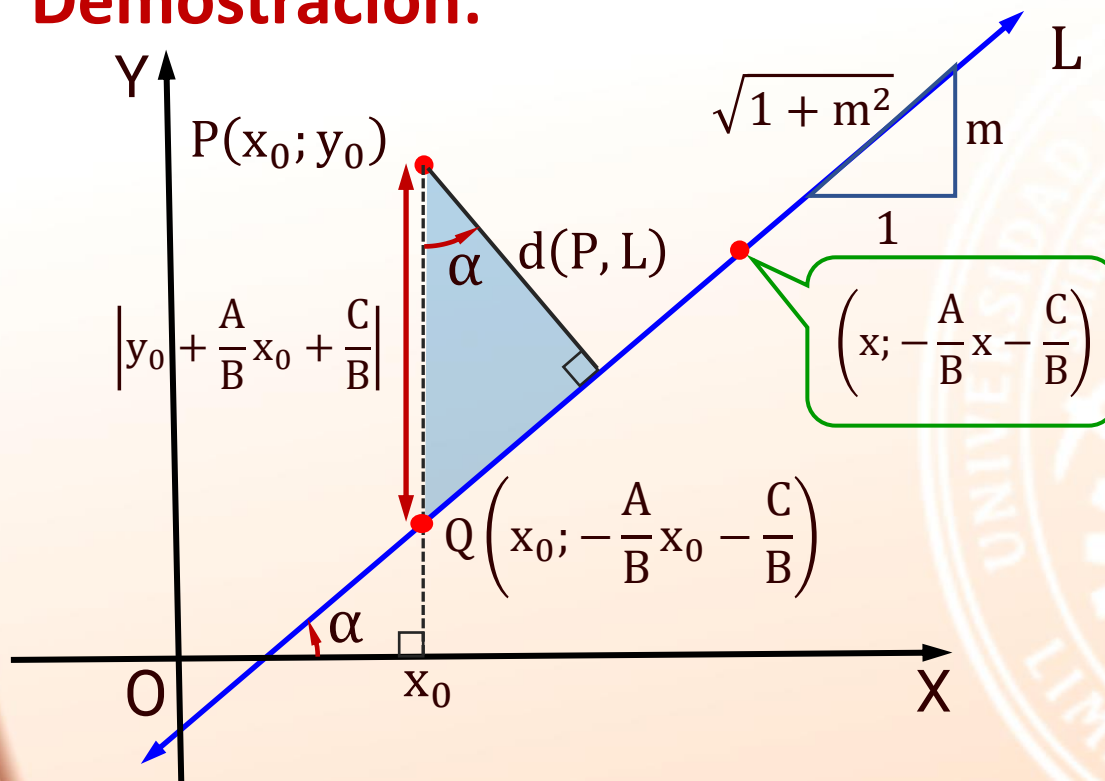
DISTANCIA MÍNIMA DE UN PUNTO A UNA RECTA

Teorema 7

Dada la recta $L: Ax + By + C = 0$; y el punto $P(x_0; y_0)$, la distancia del punto P a la recta L es igual a

$$d(P, L) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Demostración:



Notamos: $d(P, L) = PQ \cdot |\cos(\alpha)|$

Como: $\tan(\alpha) = m = -\frac{A}{B}$

$$\Rightarrow |\cos(\alpha)| = \frac{1}{\sqrt{1 + m^2}}$$

$$\Rightarrow |\cos(\alpha)| = \frac{|B|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$d(P, L) = \left| y_0 + \frac{A}{B} x_0 + \frac{C}{B} \right| \cdot \frac{|B|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$\therefore$

$$d(P, L) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

PROBLEMA 07 (2da PC – CEPRE UNI 2023-II)

En un triángulo ABC las coordenadas de sus vértices son los puntos $A(2; 4)$, $B(12; 2)$ y $C(5; 10)$. Determine la ecuación general de la recta que contiene a la altura relativa al lado $\overline{AB}$.

A) $4x - 3y + 10 = 0$

B) $5x - y - 15 = 0$

C) $10x - 2y + 5 = 0$

D) $2x + y - 20 = 0$

E) $x - 2y + 15 = 0$

CLAVE: B

PROBLEMA 08 (2da PC – CEPRE UNI 2023-II)

En un triángulo ABC las coordenadas de sus vértices son los puntos $A(8; -2)$, $B(5; 9)$ y $C(-2; 3)$. Calcule la distancia (*en u*) del vértice C a la recta que pasa por el vértice A y tiene de pendiente 2.

A) $2\sqrt{5}$ B) $3\sqrt{5}$ C) $4\sqrt{5}$

D) $5\sqrt{5}$ E) $7\sqrt{5}$

CLAVE: D

DISTANCIA ENTRE DOS RECTAS PARALELAS

Teorema 8

Dadas las rectas $L_1: Ax + By + C_1 = 0$ y $L_2: Ax + By + C_2 = 0$; la distancia entre dichas rectas es

$$d(L_1, L_2) = \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Demostración

Sea $Q \in L_2$

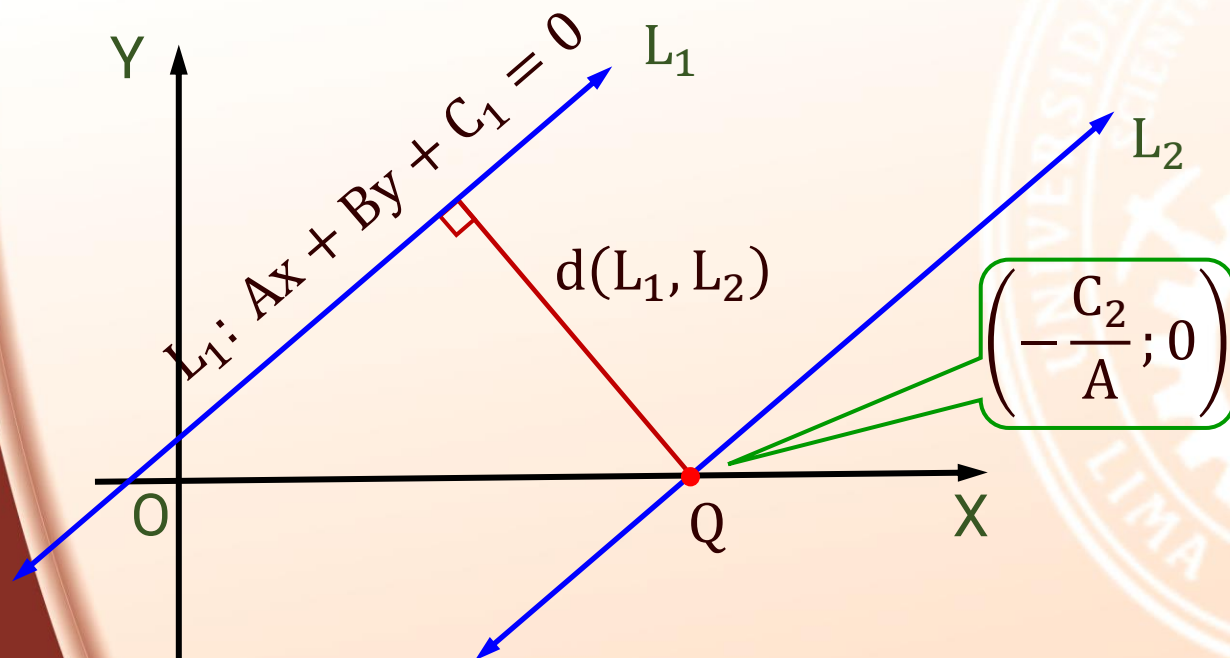
$$\Rightarrow d(L_1, L_2) = d(Q, L_1)$$

Del teorema 5:

$$d(Q, L_1) = \frac{\left| A \left(-\frac{C_2}{A} \right) + B(0) + C_1 \right|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Finalmente:

$$d(L_1, L_2) = \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$



PROBLEMA 09 (2da PC – CEPRE UNI 2023-I)

En un triángulo ABC con vértices $A(-4; 3)$, $B(-1; 7)$ y $C(5; -2)$, determine la ecuación de la recta que pasa por el vértice A e intersecta al lado $\overline{BC}$ en el punto P, dividiendo al triángulo ABC en dos regiones que están en la relación de 4 a 5, siendo el triángulo ABP de menor región.

- A) $y = 1$ B) $y = 2$ C) $y = 3$
D) $y = 4$ E) $y = 5$

CLAVE: C

PROBLEMA 10 (2da PC – CEPRE UNI 2023-I)

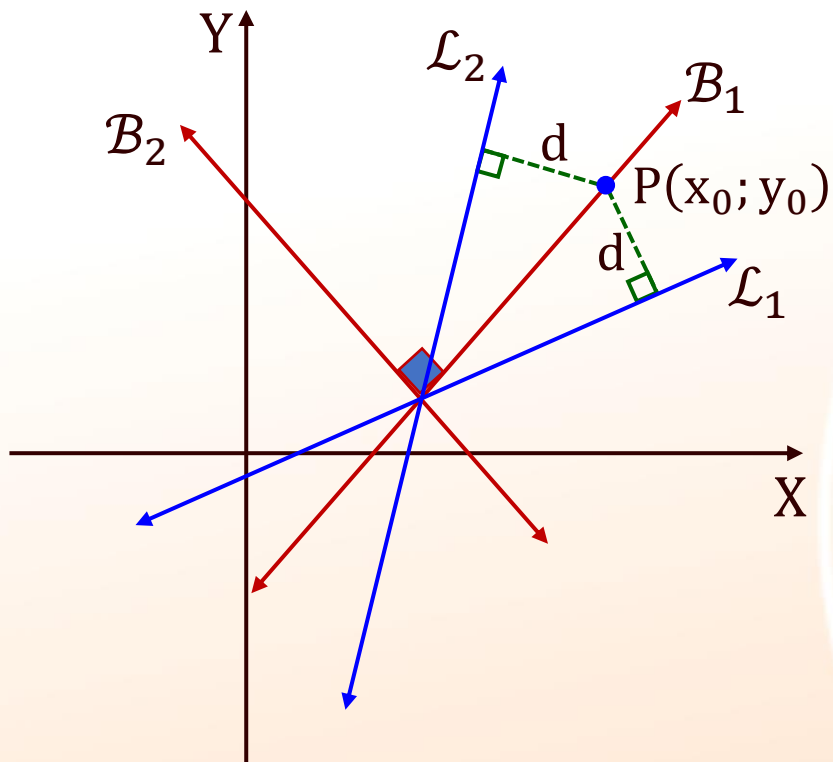
Dada las rectas paralelas $L_1: 4y = 3x$; $L_2: y = mx + 8$; calcule la distancia (*en u*) entre ellas.

- A) 4,2
B) 4,8
C) 5,2
D) 6,4
E) 7,2

CLAVE: D

Recta bisectriz entre dos rectas

Dadas dos rectas no paralelas, $\mathcal{L}_1: a_1x + b_1y + c_1 = 0$ y $\mathcal{L}_2: a_2x + b_2y + c_2 = 0$, para determinar las ecuaciones de las rectas bisectriz a ambas, consideremos:



Tomamos un punto cualquiera $P(x_0; y_0)$ de la recta bisectriz para el cual se cumple:

$$d(P, \mathcal{L}_1) = d(P, \mathcal{L}_2)$$

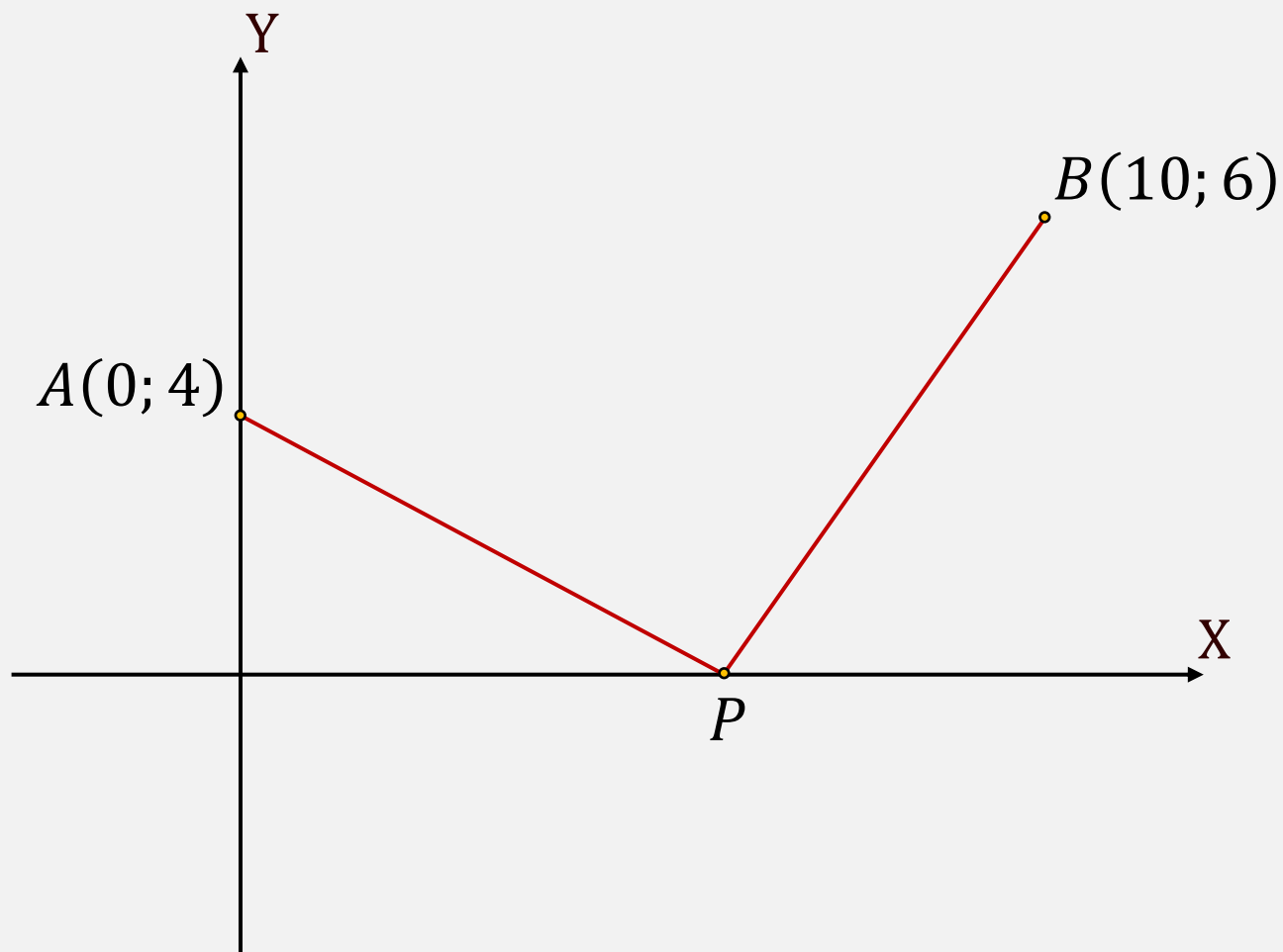
$$\frac{|a_1x_0 + b_1y_0 + c_1|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \frac{|a_2x_0 + b_2y_0 + c_2|}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$

Por el valor absoluto se desprenden dos ecuaciones, que serán las ecuaciones de las rectas bisectrices $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$.

Note además que $\mathcal{B}_1 \perp \mathcal{B}_2$.

PROBLEMA 11 (2da PC – CEPRE UNI 2020-II)

En el gráfico mostrado, si la longitud $(AP + PB)$ es mínima, determine la ecuación de la recta bisectriz del ángulo APB.



A) $x = 3$

B) $x = 4$

C) $x + 7y - 3 = 0$

D) $x - 7y - 3 = 0$

E) $x - 7y - 4 = 0$

CLAVE: B

PROBLEMA 12

Calcule la suma de coordenadas de la proyección del punto $P(0; 6)$ sobre la recta $L: 3x - 4y - 5 = 0$.

- A) $\frac{71}{25}$ B) $\frac{101}{25}$ C) $\frac{119}{25}$
D) $\frac{121}{25}$ E) $\frac{8}{5}$

CLAVE: D

PROBLEMA 13

Dada las rectas

$$L_1: 4x + y + 2 = 0 \quad y$$

$$L_2: x + 4y - 3 = 0$$

determine la ecuación de la recta L_3 bisectriz del mayor ángulo que forman L_1 y L_2 .

- A) $2x - 2y + 1 = 0$
B) $3x - 3y + 5 = 0$
C) $4x + y - 1 = 0$
D) $3x - 3y + 7 = 0$
E) $x - y + 1 = 0$

CLAVE: B

PROBLEMA 14

Los vértices de un triángulo son $A(-4; -2)$, $B(8; -6)$ y $C(2; 6)$. Calcule la suma de las coordenadas del circuncentro del triángulo ABC.

- A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 4

CLAVE: C

PROBLEMA 15

Sean las rectas

$$L_1: x - 2y + 1 = 0,$$

$$L_2: x - 4y + 3 = 0 \quad y$$

L_3 con pendiente $m_3 > 0$. Sabiendo que L_1 es la bisectriz del ángulo formado por las rectas L_2 y L_3 , determine la ecuación de la recta L_3 .

A) $13x - 16y + 1 = 0$

B) $13x - 16y + 3 = 0$

C) $3x - 5y + 4 = 0$

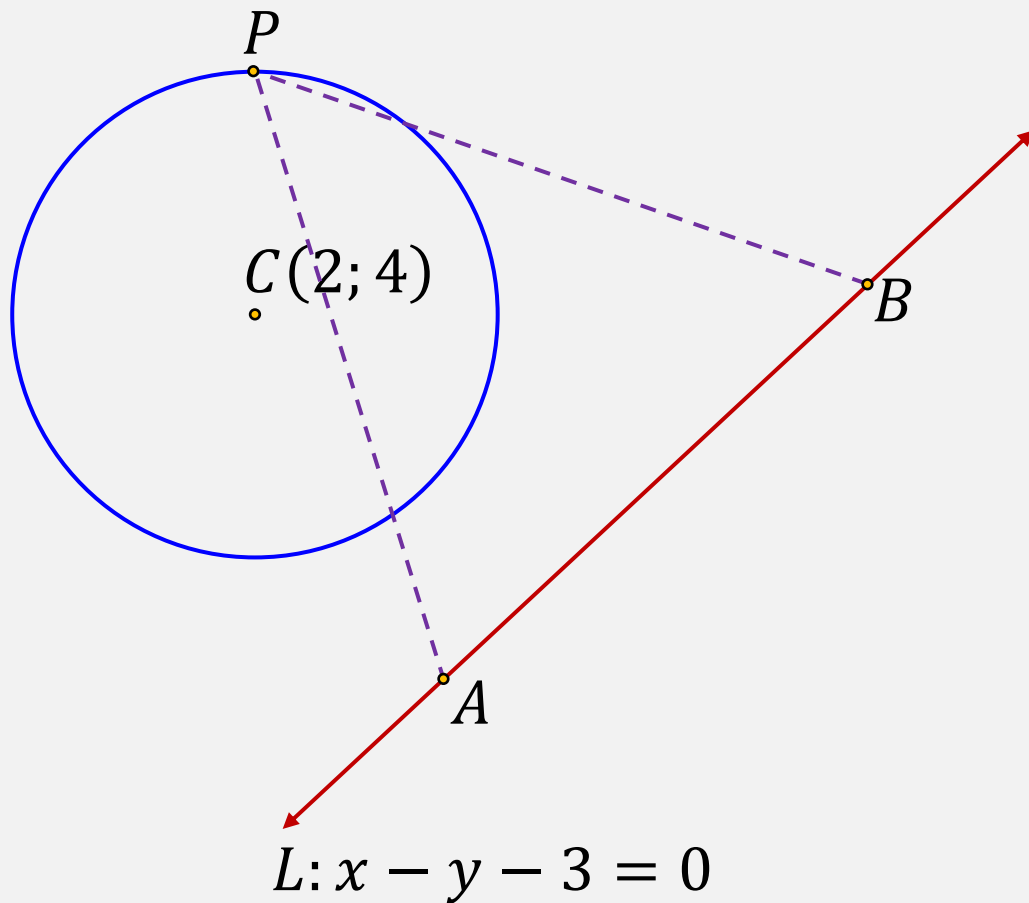
D) $3x - 5y + 8 = 0$

E) $11x - 15y + 1 = 0$

CLAVE: B

PROBLEMA 16

De la figura calcule el área máxima de la región triangular ABP (en u^2), si las abscisas de A y B son 3 y 9 respectivamente.

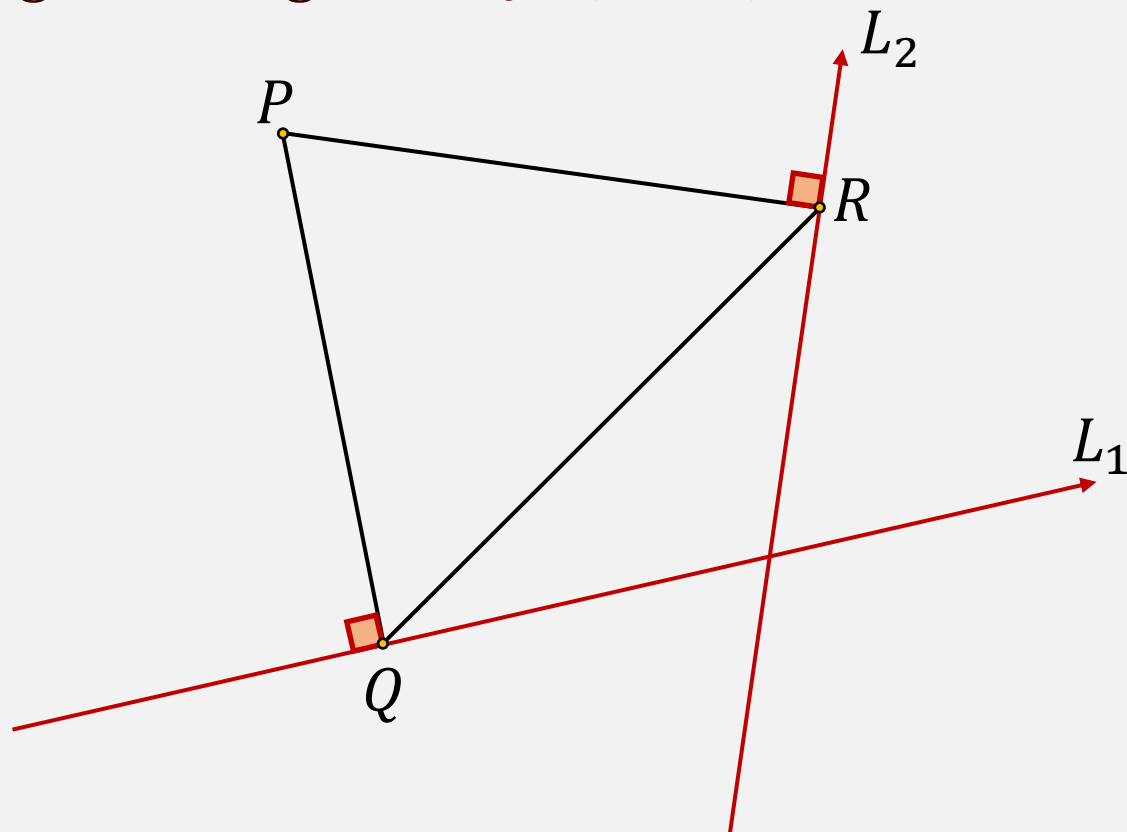


- A) 15
- B) $6\sqrt{2}$
- C) $15 + 6\sqrt{2}$
- D) $10\sqrt{2}$
- E) $15 - \sqrt{2}$

CLAVE: C

PROBLEMA 17 (2da PC – CEPRE UNI 2020-II)

En el gráfico se muestra las rectas $L_1: 2x - 3y - 20 = 0$, $L_2: 5x - y - 37 = 0$ y el punto $P(-5; 4)$, desde el cual se trazan las perpendiculares $\overline{PQ}$ y $\overline{PR}$ hacia las rectas L_1 y L_2 . Calcule el área de la región triangular PQR (en u^2).



A) $\frac{726}{13}$

B) $\frac{693}{13}$

C) $\frac{627}{13}$

D) $\frac{609}{13}$

E) $\frac{672}{13}$

CLAVE: B

PROBLEMA 18 (2da PC – CEPRE UNI 2022-I)

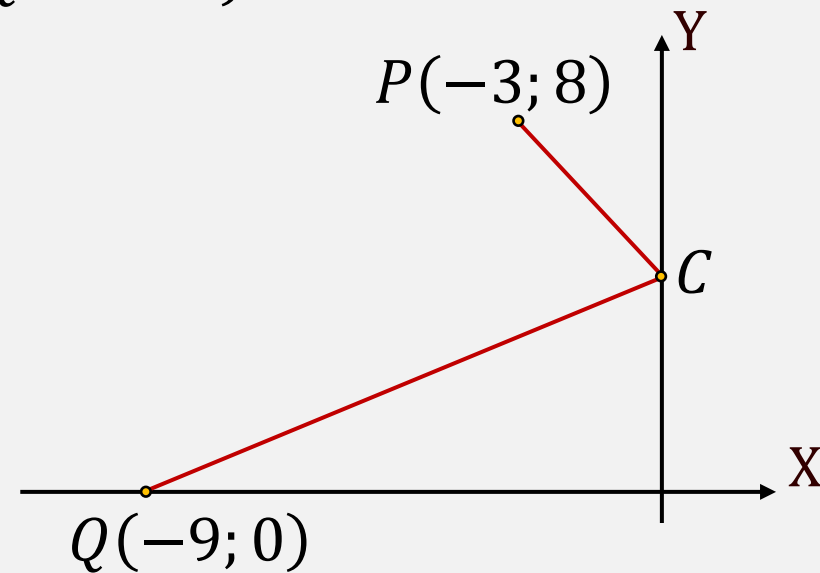
La recta $L: 5x + 3y - 15 = 0$ determina el segmento $\overline{AB}$ al interceptarse con los ejes coordenados. Determine la ecuación de la recta mediatriz del segmento $\overline{AB}$.

- A) $3x - 5y + 8 = 0$
- B) $2x - 4y + 7 = 0$
- C) $6x - 3y - 1,5 = 0$
- D) $5x - 3y + 8 = 0$
- E) $3x - 5y - 8 = 0$

CLAVE: A

PROBLEMA 19 (2da PC – CEPRE UNI 2022-I)

En la figura mostrada calcule el área de la región triangular QCP si $(QC + CP)$ es mínimo.

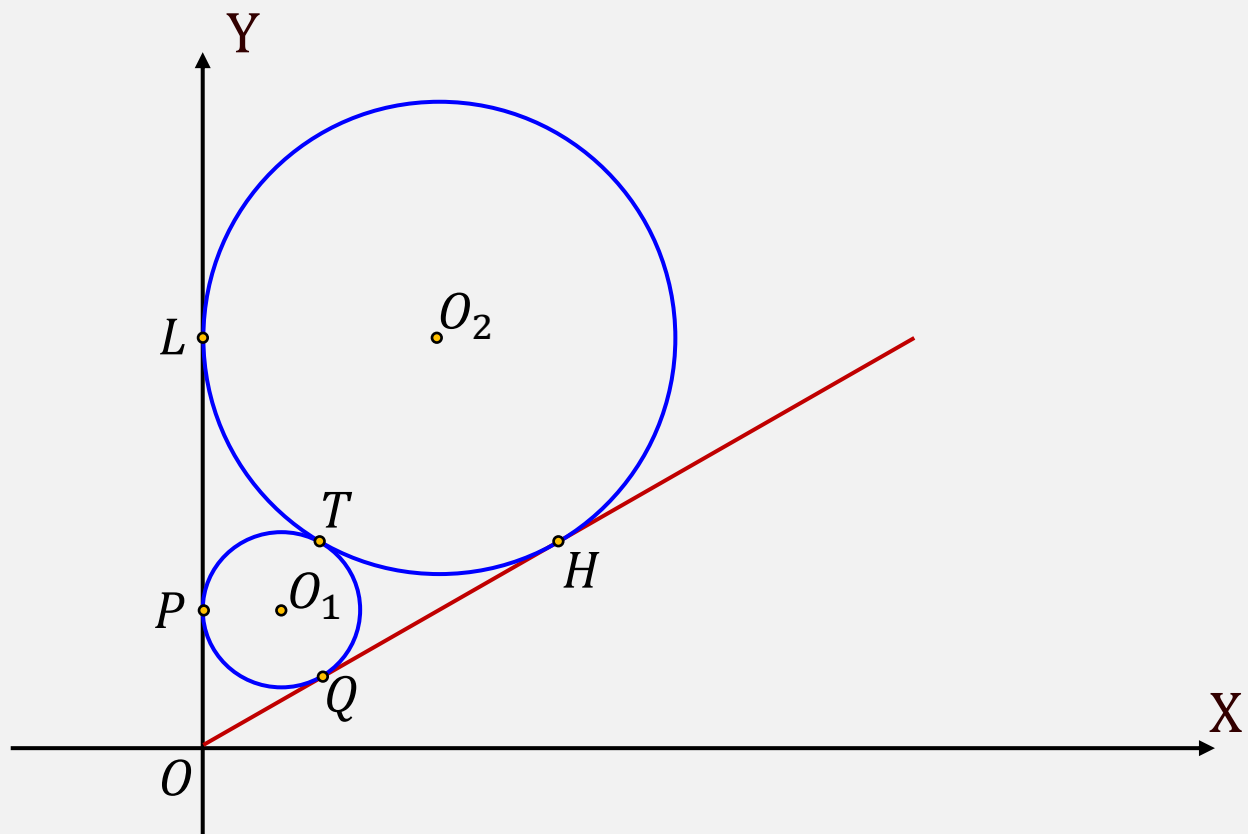


- A) 12
- B) 16
- C) 18
- D) 20
- E) 24

CLAVE: C

PROBLEMA 20

Según el gráfico los radios miden 3 u y 1 u. Determine la ecuación de la recta que pasa por el punto medio del segmento que une los centros y por L. L, P, Q, H y T son puntos de tangencia.



$$A) \sqrt{3}x + 2y + 6\sqrt{3} = 0$$

$$B) \sqrt{3}x + 2y - 6\sqrt{3} = 0$$

$$C) 2x + \sqrt{3}y - 6\sqrt{3} = 0$$

$$D) 2x + \sqrt{3}y + 6\sqrt{2} = 0$$

$$E) 2x + \sqrt{3}y + 4\sqrt{3} = 0$$

CLAVE: B